〔実験の目的〕

・弦の長さおよび張力と振動の関係を調べ、波動力学の初歩を学ぶ。
・自然倍音について調べ、平均律との違いや音階の成り立ちを理解する。
・これらを通し、日常生活に潜む自然法則の普遍性を実感する。

〔実験の原理〕

角周波数をω、波の伝わる速さをvとしたとき、原点からxの距離にある点の時刻tにおける変位yは　$y=A\sin\omega(t-x/v)$　で表される。このとき、周波数は$\nu=\omega/2\pi$。

波が弦を伝わる速度は線密度ρ(kg/m)と張力F(N)より $v=(F/\rho)^{1/2}$ と与えられるので、弦長をL(m)とすると周波数は$\nu_n=v/\lambda_n=(n/2L)(F/\rho)^{1/2}$　(s^{-1})で表される。

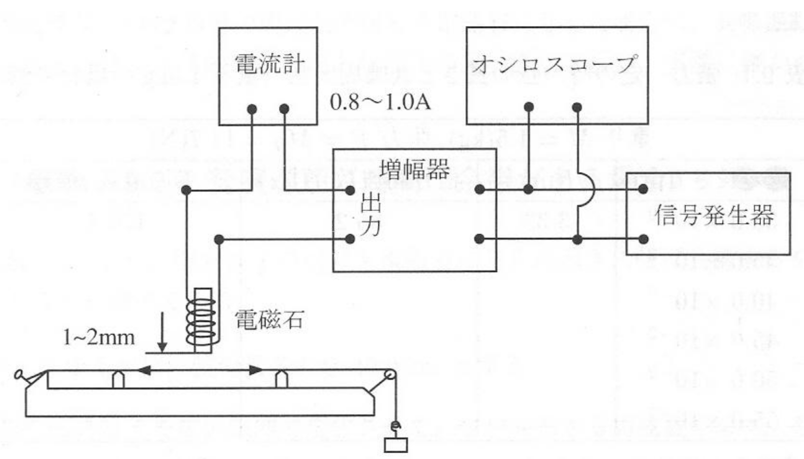
基本的にギターは線密度の違う6本の弦を一定の張力に調整し、指（とフレット）で弦長を変化させることで音の高低を生み出している。それとは異なり、ハーモニクス奏法では弦長を変えずに弦振動の節を作ることによって倍音を得ることができる。

〔実験方法〕

＜実験１：弦長と周波数＞

〇実験器具

・モノコード（60cm 長）
・重り（0.5kg×6 個）
・信号発生器
・電力増幅器
・電流計
・電磁石
・オシロスコープ



１）実験装置を上図のようにセットする。（電磁石の位置は弦の中央付近で、弦との距離は1〜2mm とする。）

２）重りを2.0〜3.0kg の範囲で一定にしたまま弦の長さを30.0cm から55.0cm まで5.0cm 刻みで変化させて共鳴振動数を測定する。

＜実験２：自然倍音と平均律＞

○実験器具

・クラシックギター　　　　　　　・チューナーセット

・巻尺　　　　　　　　　　　　　・関数電卓

１）ギターを普通にチューニングする。
２）弦長の 1/2,1/3,1/4,1/5,1/6…でハーモニクスを出す。
３）手順２以外の場所でハーモニクスの出る位置を探す。
４）開放弦を弾いてから指で弦に振れてハーモニクスをつくる（フィルター操作)。
５）第６弦を３度下のドまで下げる。
６）弦長の 1/2,1/3,1/4,1/5,1/6…でのハーモニクスを五線譜に表す。
７）右手の位置によってはハーモニクスが出ないことを確認する。

〔実験結果〕

＜実験１＞

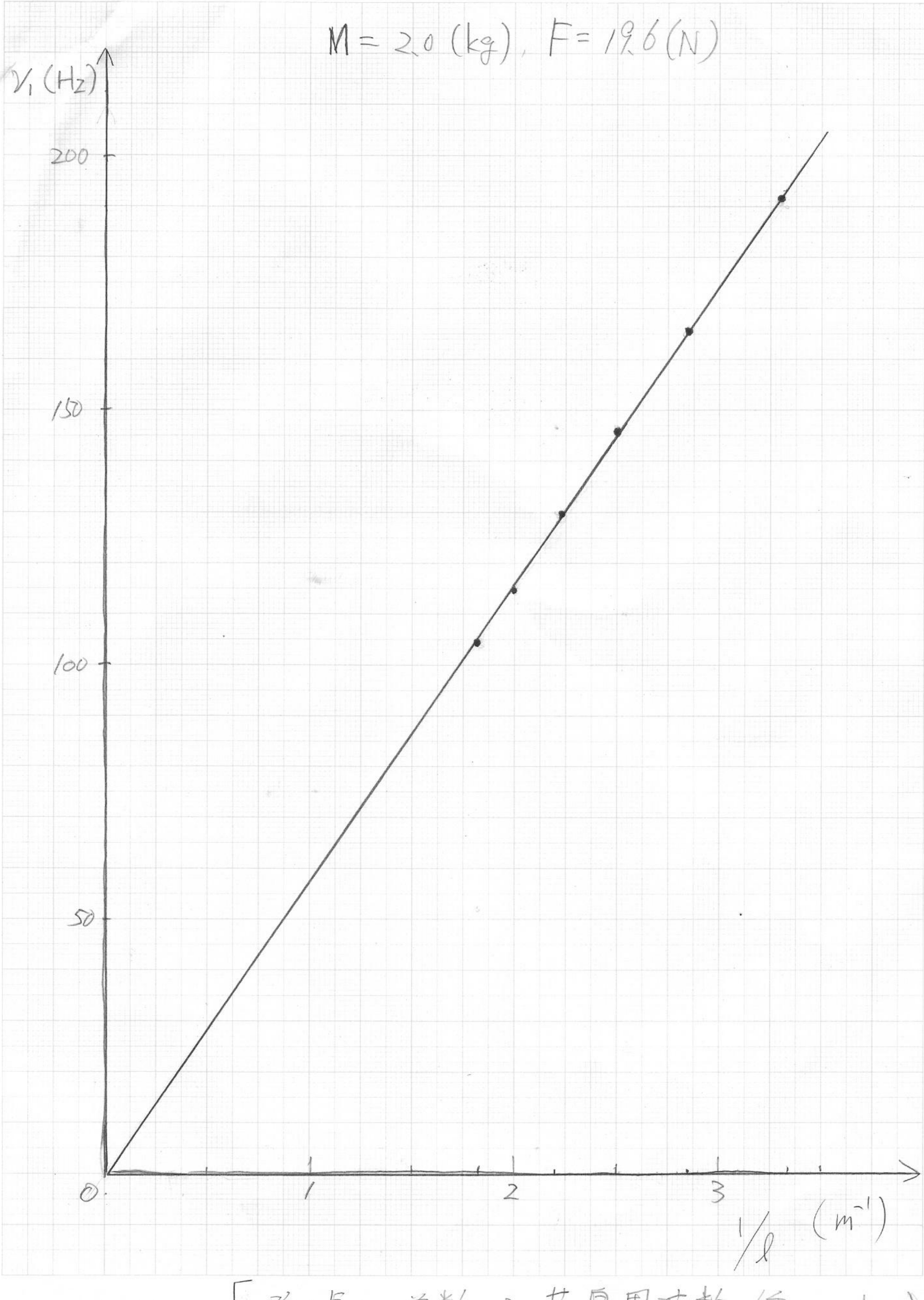
○弦の長さと共鳴周波数の関係は以下の通りである。

重り M=2.0(kg), 重力加速度 $g=9.8(m/s^2)$, 線密度 $\rho=1.55\times10^{-3}$(kg/m)				
L(m)	$1/L(m^{-1})$	f(Hz)	ν_1(Hz)	理論上 ν
0.30	3.33	96.2	192.4	187.4
0.35	2.86	83.8	167.6	160.6
0.40	2.50	73.6	147.2	140.6
0.45	2.22	64.9	129.8	124.9
0.50	2.00	57.2	114.4	112.5
0.55	1.82	52.4	104.8	102.2

（弦長 L、信号周波数 f、共鳴周波数 ν_1、理論上の共鳴周波数 ν）

○共鳴周波数 ν_1(Hz)と弦の長さの逆数 $1/L(m^{-1})$をプロットしたグラフを次ページに示す。
このグラフより、共鳴周波数は弦の長さに反比例していることがわかる。

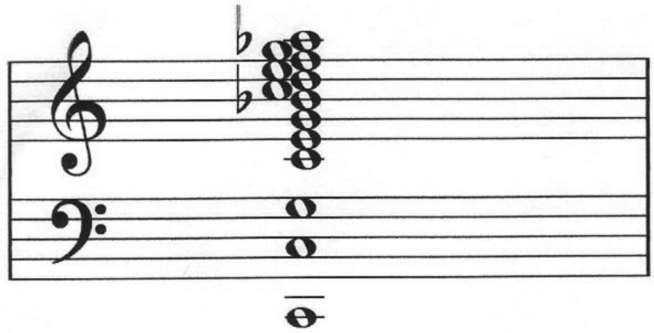
○重り 2.0kg（張力 19.6N）、信号周波数 55.0Hz とし、弦の長さを約 0.51(m)にすれば共鳴周波数は 110Hz になる。



[弦の長さの逆数 対 共鳴周波数（重り 2.0kg）]

＜実験２＞

○n＝13のモードまでハーモニクスを確認することができた。平均律との関係は以下の通りである。
　n＝11とn＝13の自然倍音は平均律の半音間のほぼ中間あたりにあるので音名の判別はできない。



65.4Hz を「ド」としたときの自然倍音と対応する平均律での周波数					
モード	音名	自然倍音 (Hz)	平均律 (Hz)	周波数比 (平/自)	周波数差(Hz) (平−自)
1	ド	65.4	65.4	1.000	0.0
2	ド	130.8	130.8	1.000	0.0
3	ソ	196.2	196.0	0.999	−0.2
4	ド	261.6	261.6	1.000	0.0
5	ミ	327.0	329.6	1.008	2.6
6	ソ	392.4	392.0	0.999	−0.4
7	シ♭	457.8	466.1	1.018	8.3
8	ド	523.2	523.2	1.000	0.0
9	レ	588.6	587.3	0.998	−1.3
10	ミ	654.0	659.2	1.008	5.2
11	ファ＋	719.4	698.4	0.971	−21.0
12	ソ	784.8	783.9	0.999	−0.9
13	ラ♭＋	850.2	830.5	0.977	−19.7

○弦長の 1/3 に節を作る点であればヘッド側でもブリッジ側でも n＝3 のハーモニクスを鳴らすことができる。ほかのモードでも同様である。例えば n＝5 ならハーモニクスを作れる点は 4 つあった（ブリッジから弦長の 1/5,2/5,3/5,4/5 の位置)。

○開放弦を弾いたのち弦の中央に触れて節を作ったところ、n＝2 のハーモニクスが鳴った。ほかのモードでも同様にできた。

○右手で弾く位置が節の位置にあたるときハーモニクスは鳴らなかった。

〔設問の解答と考察〕

＜実験１＞

１）弦の共鳴周波数ν_1の 1/2 の信号周波数 f を電磁石に与えた場合に弦が共鳴するのはどうしてか。

信号の 1 周期のうちに電磁石では N と S が 1 回入れ替わり、弦は 2 回引っ張られることになるので、共鳴周波数の 1/2 の信号周波数で弦が共鳴する。

２）この実験装置を使ってどのようにすれば基準周波数ν_1以外のモードの振動を起こすことができるか。

n＝2 で共鳴させるためには n＝1 の場合の 2 倍、n＝3 で共鳴させるには n＝1 の場合の 3 倍となる信号周波数を用いればよい。このとき電磁石はそのモードで腹となる部分に近づける。

＜実験２＞

１）ナットから弦長の 1/3,1/4,1/5,1/6 の場所に指を触れながら弾いたハーモニクス奏法で生じる振動はどのようなものか。これ以外にハーモニクス奏法が可能な場所はどこか。

弦長の 1/3, 1/4, 1/5, 1/6 の場所に触れて生じる振動モード																
	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1/3	○			○			○			○			○			○
1/4		○				○				○				○		
1/5			○					○					○			
1/6				○						○						○

必ずナット、ブリッジ、指を節とする振動が生じる（そうでない波は減衰する）。ナットから弦長の 1/X の場所に指を触れながら弾いたハーモニクス奏法で生じる振動モードは n＝mX（m は自然数）。

また、ナットから弦長の 1/X,2/X,…,(X-2)/X,(X-1)/X となる場所に指を触れても振動モード n＝X のハーモニクスを得られる。

２）ハーモニクス奏法を行うときに弦を弾く位置によっては音が出ないのはなぜか。

目的のモードにおける腹を右手で弾かなければ音はでない。例えば、左手でナットから弦長の 1/3 となる点に触れると、2/3 となる点は節となるので、ここを右手で弾いても音は出ない。

ナットとブリッジが節になる振動以外は減衰するので、左手とブリッジが節で右手で弾いた位置が腹となる振動でナット部分が節にならない場合は減衰して音が鳴らない、と言い換えることもできる。

３）平均律で調律されているピアノで和音を弾くと濁るのはなぜか。

自然音階は倍音から生まれたので、和音を構成する音の音程（周波数の比）が簡単な有理数比となる。一方、平均律でつくられた和音ではオクターブ以外の音程では有理数比にならず、自然音階との差が生じる。

たとえば平均律のコードＣにおける「ソ」は、もともと主音「ド」となめらかに響く自然倍音の「ソ」とほんの少し周波数に差があり、その差がうねりを生んで濁ったように聴こえる。

４）弦を弾く右手の位置を変えると音色が変化するのはなぜか。

一般に、弾く位置が弦の中央に近いほど音が丸く聴こえる。弦を弾く位置が振動の腹になるので、弦の中央付近を弾くと中央を腹とする振動、すなわちモード１の振動が特に強く生じる。弾く位置がブリッジ側に近いほど、波長の短い振動、すなわちモード数の高い倍音を多く含むようになる。

＜発展課題＞

１）弦の共鳴周波数 ν_1 の 1/2 以外の周波数の信号を電磁石に与えた場合に、共鳴振動が起きることがあるか。

たとえばもとの２倍の周波数の信号を電磁石に与えて、モード２で腹となる部分、すなわち端から弦長の 1/4 の場所に近づけた場合、モード２の共鳴振動が起こると考えられる。ほかのモードでも同様なことが起こるだろう。

２）弦長の 1/5 でのハーモニクスをフレットの直上で行うとうまく音がでないのはなぜか。

第４フレットは押さえたときに平均律の半音４つ分だけ音が高くなるような位置にある。すなわち、ブリッジからフレットまでの距離はブリッジ－ナット間の距離の $2^{-4/12} \fallingdotseq 0.7937$ 倍である。一方、ハーモニクスを鳴らす位置からブリッジまでの距離はブリッジ－ナット間の距離の 4/5＝0.800 倍である。したがって、弦長の 1/5 でのハーモニクスは第４フレットよりもややヘッド側でよく鳴る。

３）人間の知覚する音の「高さ（ピッチ感）」は振動現象のどのような数理的性質によって決まっているか考えよ。

人間の耳に入ってくる音波は周波数や波形の違ったさまざまな音波が合わさったものであるが、波は元のそれぞれの性質を失わず、知覚するときには元の音波に分離できると考えられる。たとえば音楽を聴きながら車を運転した場合にエンジン音によって音楽のピッチが変わるということはない。

４）西洋音楽に限らない多くの民族において、なぜ音階の最小単位が１オクターブの 1/12 程度になったか考えよ。

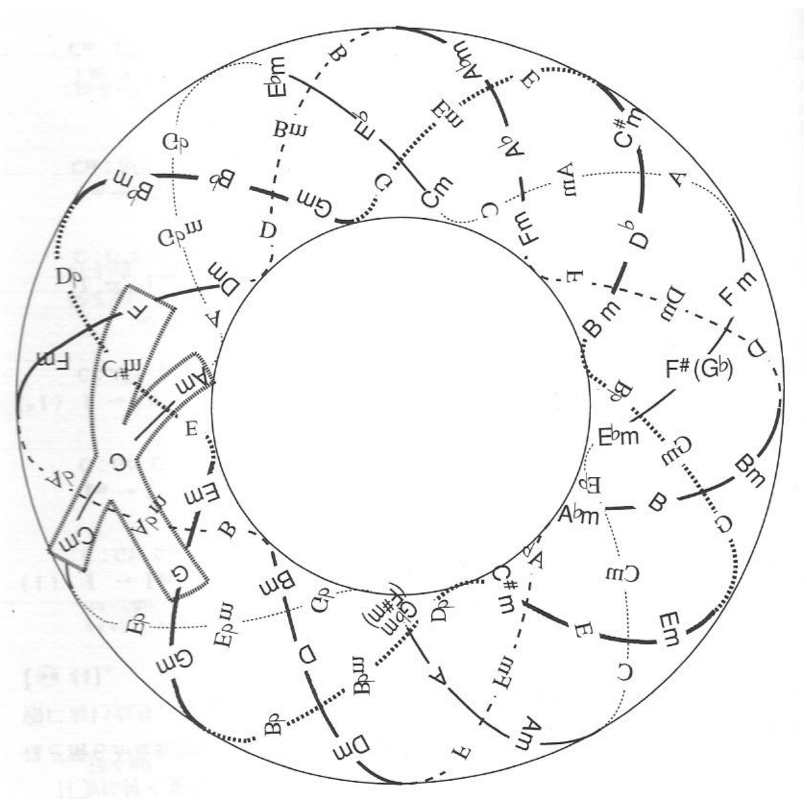
・1 オクターブを 1/12 にしたときに自然音階からの誤差が小さく、和音にしたときに生じるうねり（濁り）が少なかった。
・これ以上細かく切ると人間の耳では判別が難しいし、これ以上荒くすると表現の幅が狭まってしまう。
（・13 はキリスト教徒にとって不吉な数なので避けた。）

5）平均律と自然音階の長所と短所をまとめ、その短所を知りながら西洋音楽が敢えて平均律を採用した理由を考えよ。

	長所	短所
自然音階	○音階が倍音から成るので和音の響きがなめらか	○主音ごとに音階が存在するので転調するときなどはそれぞれ調ごとに調律した楽器が必要
平均律	○どの音程も等間隔なのでひとつの楽器ですべての調をカバーできる	○音程を機械的に区切ったので和音にすると濁る

自然音階の場合、主音ごとに音階が独立して存在するため、ほかの調で演奏するときにはまた別の楽器が必要となる。

一方平均律では多少和音に濁りが見られるものの、音程が等間隔なのでひとつの楽器ですべての調を演奏することができる。また、転調や和音の借用などが容易になり楽曲の幅が広がるので、より自由に音楽を創造するためには平均律のほうが好都合であると考えられる。



また、関係調を結んでできる左図のような輪は平均律の為せる業である。輪廻転生の思想を持つ文化は少なくないので、すべてのものにつながりを持たせたこの平均律が受け入れられたのにはこういった要因が少なからず関わっているのかもしれない。